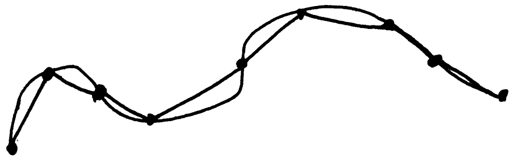
Rektifikacione krive, i dužina luka
i prirodna parametrizacija krive

U ovoj lekciji želimo da uvedemo koncept dužine luka krive. Ideja je da aproksimiramo krivu uz pomoć uzastopno upisanih nadovezanih duži, (poligonalne linije) tehnika koju smo naučili iz antičke geometrije. Intuicija nam govori da dužina poligonalne linije (uzastopno upisanih nadovezanih duži) nebi trebala preći dužinu krive (s obzirom da je prava linija najkraći put između dvije tačke, iz čega bi



mogli naslutiti da će dužina krive biti jednaka gornjoj granici skupa dužina svih mogućih poligonalnih linija. Prema tome, izgleda da možemo na prirodan način, definisati dužinu krive kao najmanja gornja granica dužina svih mogućih upisanih poligonalnih linija.

Za većinu krivih koje se pojavljuju u praksi, ovo nam daje korisnu definiciju dužine luka. Kakogod, kao što ćemo vidjeti, postoje krive za koje nije moguće naći gornju granicu dužina upisanih poligonalnih linija. Prema tome, javlja se potreba da klasificiramo krive u dvije kategorije: one koje imaju dužinu i one koje nemaju. Prve zovemo <u>rektifikacione krive</u>, dok one krive koje nemaju dužinu zovemo nerektifikacione.

Sljedeće što želimo je formalno opisati ove ideje.

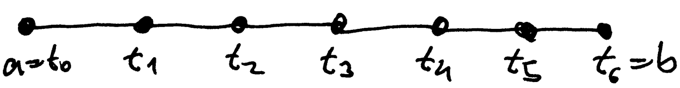
Neka je $\vec{r}: [a,b] \to R^3$

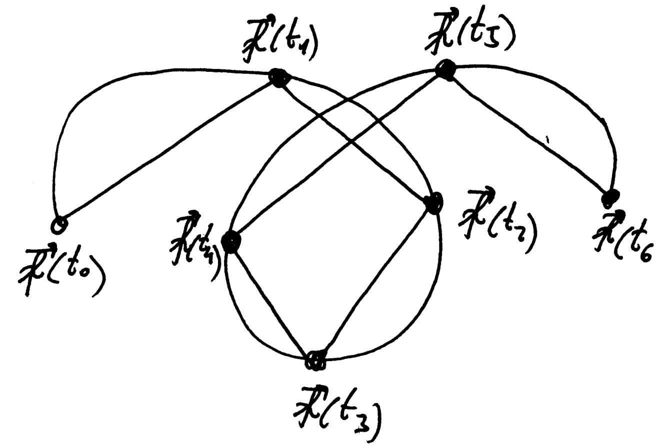
$$t \to (x(t), y(t), z(t))$$

data kriva u prostoru. Za svaku podjelu intervala $[a,b]$ date sa

$P=\{t_0, t_1, \dots, t_m\}$, $a=t_0<t_1<\dots<t_m=b$

tačke $\vec{r}(t_0), \vec{r}(t_1), \dots, \vec{r}(t_m)$ predstavljaju vrhove upisane poligonalne linije.





Dužinu ove poligonalne linije ćemo označavati sa $duž_{\vec{r}}(P)$ i definisati kao sumu

$$duž_{\vec{r}}(P) = \sum_{k=1}^{m} |\vec{r}(t_k) - \vec{r}(t_{k-1})|$$

<u>Definicija</u> Ako je skup brojeva $duž_{\vec{r}}(P)$ za svaku podjelu P intervala $[a,b]$, tada za krivu $\vec{r}$ kažemo da je REKTIFIKTABILNA na $[a,b]$ i njezina dužina luka, koju ćemo označavati sa s, definirano sa

$$s = \sup\{duž_{\vec{r}}(P) : P \in \mathcal{P}_{[a,b]}\},$$

gdje je $\mathcal{P}_{[a,b]}$ skup svih mogućih podjela intervala $[a,b]$.

Ako skup brojeva $duž_{\vec{r}}(P)$ nije ograničena, za $\vec{r}$ kažemo da je NEREKTIFIKTABILNA.

rektifiktabilna – sinonimi: ispravljiva, konačna

(#) Koristeći isključivo definiciju, ispitati da li kriva $\vec{x} = t\vec{e_1} + t^2\vec{e_2}$ na intervalu $[0,1]$ ima dužinu, ako su $|\vec{e_1}| = |\vec{e_2}| = 1$ i $\vec{e_1} \perp \vec{e_2}$.

Rj. Napravimo podjelu P intervala $[0,1]$

$$P = \{\underset{\overset{\|}{0}}{t_0}, t_1, t_2, \dots, \underset{\overset{\|}{1}}{t_n}\}$$

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = 1$$

dužinu poligonalne linije krive $\vec{x}$ za podjelu P računamo

$$
\begin{aligned}
duž_{\vec{x}}(P) &= \sum_{i=0}^{n-1} |\vec{x}(t_i) - \vec{x}(t_{i+1})| = \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} |(t_i\vec{e_1} + t_i^2\vec{e_2}) - (t_{i+1}\vec{e_1} + t_{i+1}^2\vec{e_2})| = \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} |(t_i - t_{i+1})\vec{e_1} + (t_i^2 - t_{i+1}^2)\vec{e_2}| = \\
&\le \sum_{i=0}^{n-1} |t_i - t_{i+1}|\underbrace{|\vec{e_1}|}_{=1} + |t_i^2 - t_{i+1}^2|\underbrace{|\vec{e_2}|}_{=1} = \left| \; 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1 \; \right| \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \left[(t_{i+1} - t_i) + (t_{i+1}^2 - t_i^2)\right] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i)\left[1 + \underbrace{t_{i+1}}_{\le 1} + \underbrace{t_i}_{\le 1}\right] \le 3\sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1} - t_i) = 3
\end{aligned}
$$

Dužina poligonalne linije krive $\vec{x}$ za proizvoljnu podjelu P je ograničena odozgo sa 3, što znači da $\exists \sup\{duž_{\vec{x}}(P) : P \in \mathcal{P}[a,b]\}$.

(#) Napisati parametarski oblik jednačine krive

$$4ax = (y+z)^2; \quad 4x^2 + 3y^2 = 3z^2$$

i naći dužinu krive od tačke $O(0,0,0)$ do proizvoljne tačke krive.

Rj.

$$C: \begin{cases} 4ax = (y+z)^2 \\ 4x^2 + 3y^2 = 3z^2 \end{cases}$$

Krive u ravni se mogu parametrizovati pomoću familija krugova, familije pravih, familije parabola, bilo koje familije krivih koje imaju "jednostavni" oblik

Jednačina $4ax = (y+z)^2$ sugeriše smjenu $x = at^2$.

$$4a \cdot at^2 = (y+z)^2$$

$$4a^2t^2 = (y+z)^2 \Rightarrow y+z = 2at$$

Dok se iz druge jednačine $4x^2 + 3y^2 = 3z^2$ dobija

$$4x^2 = 3(z^2 - y^2)$$

$$4a^2t^4 = 3(z-y)(z+y) \xRightarrow{y+z=2at} 3(z-y)\,2at = 4a^2t^4 \quad / : 2at \cdot 3 \ (t \neq 0)$$

$$z - y = \frac{2}{3}at^3$$

$$\begin{aligned} y + z &= 2at \\ y - z &= -\frac{2}{3}at^3 \\ \hline 2y &= 2at\left(1 - \frac{1}{3}t^2\right) \end{aligned}$$

$$y = at\left(1 - \frac{1}{3}t^2\right)$$

$$y = a\left(t - \frac{1}{3}t^3\right)$$

$$\begin{aligned} y + z &= 2at \\ + \quad z - y &= \frac{2}{3}at^3 \\ \hline 2z &= 2a\left(t + \frac{1}{3}t^3\right) \end{aligned}$$

Prema tome

$$C: \begin{cases} x = at^2 \\ y = a\left(t - \frac{1}{3}t^3\right) \\ z = a\left(t + \frac{1}{3}t^3\right) \\ -\infty < t < +\infty \end{cases}$$

Ako je kriva data u parametarskom obliku $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ tada je dužina luka krive od tačke sa parametrom t_0 do tačke sa parametrom t_1 data formulom:

$$s=\int_{t_0}^{t_1} ds=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt$$

krivoliniski integral prve vrste

$\dot{x}=2at,\quad \dot{y}=a(1-t^2),\quad \dot{z}=a(1+t^2)$

Pronađimo dužinu luka od tačke $O(0,0,0)$ do proizvoljne tačke recimo $A(a\lambda^2;\ a(\lambda+\frac{1}{3}\lambda^3);\ a(\lambda-\frac{1}{3}\lambda^3))$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

$$s=\int_0^\lambda\sqrt{4a^2t^2+a^2(1-t^2)^2+a^2(1+t^2)^2}\,dt=\int_0^\lambda\sqrt{4a^2t^2+a^2(1\underline{-2t^2}+t^4+1\underline{+2t^2}+t^4)}\,dt$$

$$=a\int_0^\lambda\sqrt{4t^2+2+2t^4}\,dt=a\sqrt{2}\int_0^\lambda\sqrt{\underbrace{t^4+2t^2+1}_{(t^2+1)^2}}\,dt=a\sqrt{2}\int_0^\lambda(t^2+1)\,dt$$

$$=a\sqrt{2}\left(\frac{1}{3}t^3\Big|_0^\lambda+t\Big|_0^\lambda\right)=a\sqrt{2}\left(\frac{1}{3}\lambda^3+\lambda\right)\quad\Rightarrow\quad s=a\sqrt{2}\left(\frac{1}{3}\lambda^3+\lambda\right)$$

Dužina luka od tačke O do tačke A je $\sqrt{2}\,y$ gdje je y koordinata tačke A.

Izračunati dužinu luka s krive $\vec{r} = e^t(\cos t, \sin t, 0)$, od tačke 0 do tačke t. Poslije toga iz formule za dužinu luka s, parametar t izraziti preko s.

Rj. Dužina luka krive od tačke 0 do λ se računa po formuli

$$s = \underbrace{\int_0^\lambda ds}_{\text{malo } s} = \int_0^\lambda \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt$$

(ako je kriva data u parametarskom obliku)

U našem slučaju $\dot{x} = (e^t \cos t)' = e^t \cos t - e^t \sin t = e^t(\cos t - \sin t)$

$$\dot{y} = (e^t \sin t)' = e^t \sin t + e^t \cos t = e^t(\sin t + \cos t)$$

$$\dot{z} = 0$$

$$\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = e^t \sqrt{\cos^2 t - \cancel{2 \sin t \cos t} + \sin^2 t + \sin^2 t + \cancel{2 \sin t \cos t} + \cos^2 t} =$$

$$= e^t \sqrt{2}$$

$$s = \int_0^\lambda ds = \int_0^\lambda e^t \sqrt{2}\, dt = \sqrt{2}\, e^t \Big|_0^\lambda = \sqrt{2}(e^\lambda - 1)$$

$$s = \int_0^t ds = \sqrt{2}(e^t - 1)$$

Dužina luka od 0 do t je $s = \sqrt{2}(e^t - 1)$.

$$e^t - 1 = \frac{1}{\sqrt{2}} s$$

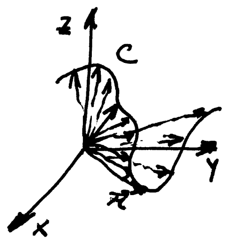
$$e^t = \frac{s}{\sqrt{2}} + 1$$

$t = \ln\left(1 + \frac{s}{\sqrt{2}}\right)$ parametar t izražen preko dužine luka s.

Do sada smo neku krivu $\vec{r}$ obično parametrizivali pomoću parametra t. Parametrizaciju možemo uraditi i pomoću dužine luka krive od neke tačke sa parametrom 0 do tačke sa parametrom λ (lambda). Ovakvu parametrizaciju zovemo prirodna parametrizacija

Napisati jednačinu krive $\vec{r}=(a\cos t, a\sin t, bt)$ izrazivši $\vec{r}$ kao funkciju argumenta $\overset{luk}{s}$. Diferenciranjem po luku s naći jedinične vektore tangente u proizvoljnoj tački.

Rj. $C: \vec{r}=(a\cos t; a\sin t; bt)$



$$s=\int_{t_0}^{t_1} ds = \int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt$$

krivol. integral prve vrste

dužina luka krive $C: \begin{cases} x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\\ t_0\le t\le t_1\end{cases}$ od tačke t_0 do t_1

Kako je $ds=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}$ tj. u našem slučaju

$\dot{x}=-a\sin t$

$\dot{y}=a\cos t$

$\dot{z}=b$

$$ds=\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t+b^2}=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$s=\int_0^{\lambda} ds=\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{\lambda} dt$$

uzmimo dužinu luka od 0 do neko $\lambda\in\mathbb{R}$

$$s=\sqrt{a^2+b^2}\; t\Big|_0^{\lambda} \overset{\text{za to možemo uzeti } 0}{\underset{\text{za } t_0=t}{\Longrightarrow}} \lambda=\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}=t$$

ako umjesto λ stavimo param. t

$$\vec{r}=\left(a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

$\vec{r}$ kao f-ja čiji je argument luk s

$\boxed{\vec{t}=\dfrac{d\vec{r}}{ds} \text{ vektor tangente}}$

$$\vec{t}=\left(a\left(-\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}};\ a\left(\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}};\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

$$\vec{t}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(-a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}};\ a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}};\ b\right)$$

ako izračunamo $|\vec{t}|$ primjetićemo da smo dobili $|\vec{t}|=1$.

(#) Data je kriva $C: \vec{r}=(a\cos t,\ a\sin t,\ a\ln\cos t)$.
Napisati jednačinu te krive uvodeći kao argument luk s.

Rj.: Dužina luka krive od tačke sa parametrom 0 do tačke sa parametrom λ data je formulom

$$s=\int_0^\lambda ds$$ ← krivolinijski integral prve vrste

$$\dot{x}=-a\sin t \qquad ds=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}=\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t+a^2\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}$$

$$\dot{y}=a\cos t$$

$$\dot{z}=\frac{a}{\cos t}\cdot(-\sin t) \qquad ds=a\sqrt{1+\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}=\frac{a}{\cos t}$$

$$s=\int_0^\lambda \frac{a}{\cos t}\,dt=a\int_0^\lambda\frac{dt}{\cos t}=$$ | želimo izraz $\frac{1}{\cos t}$ napisati kao zbir dva razlomka |

$$=a\int_0^\lambda\frac{1+\sin x}{(1+\sin x)\cos x}\,dx=a\int_0^\lambda\frac{\sin^2 x+\cos^2 x+\sin x}{(1+\sin x)\cos x}\,dx$$

$$=a\int_0^\lambda\frac{\cos^2 x+\sin x(1+\sin x)}{(1+\sin x)\cos x}\,dx=a\int_0^\lambda\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}+\frac{\sin x}{\cos x}\right)dx$$

$$=a\int_0^\lambda\frac{d(1+\sin x)}{1+\sin x}+a\int_0^\lambda\frac{-d(\cos x)}{\cos x}=\left(a\ln|1+\sin x|-a\ln\cos x\right)\Big|_0^\lambda$$

$$=a\ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right|\Big|_0^\lambda=a\ln\left|\frac{1+\sin\lambda}{\cos\lambda}\right|$$

Dobili smo $s = a \ln\left|\frac{1+\sin t}{\cos t}\right|$ (ako umjesto parametra λ stavimo parametar t)

$$\frac{s}{a} = \ln \frac{1+\sin t}{\cos t}$$

$$\operatorname{ch}\frac{s}{a} = \frac{e^{\frac{s}{a}} + e^{-\frac{s}{a}}}{2}$$

$$e^{\frac{s}{a}} = \frac{1+\sin t}{\cos t}$$

U našem slučaju

$$e^{\frac{s}{a}} + e^{-\frac{s}{a}} = \frac{1+\sin t}{\cos t} + \frac{\cos t}{1+\sin t} = \frac{\overset{1+2\sin t+\sin^2 t}{(1+\sin t)^2} + \cos^2 t}{\cos t\,(1+\sin t)}$$

$$\frac{e^{\frac{s}{a}} + e^{-\frac{s}{a}}}{2} = \frac{2\,(1+\sin t)}{2\cos t\,(1+\sin t)} = \frac{1}{\cos t}$$

Prema tome $\cos t = \frac{1}{\frac{e^{\frac{s}{a}} + e^{-\frac{s}{a}}}{2}} = \frac{1}{\operatorname{ch}\frac{s}{a}} \Rightarrow a\cos t = \frac{a}{\operatorname{ch}\frac{s}{a}}$

U drugoj koordinati imamo izraz $a\sin t$

$$e^{\frac{s}{a}} = \frac{1+\sin t}{\cos t} \Rightarrow 1+\sin t = \frac{e^{\frac{s}{a}}}{\operatorname{ch}\frac{s}{a}}$$

$$\sin t = \frac{e^{\frac{s}{a}}}{\operatorname{ch}\frac{s}{a}} - 1$$

Prema tome parametrizacija krive pomoću luka s izgleda

$$\vec{r} = \left(\frac{a}{\operatorname{ch}\frac{s}{a}},\ a\left(\frac{e^{\frac{s}{a}}}{\operatorname{ch}\frac{s}{a}} - 1\right),\ a\ln\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{s}{a}}\right)$$

$$\vec{r} = a\left(\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{s}{a}},\ \frac{e^{\frac{s}{a}}}{\operatorname{ch}\frac{s}{a}} - 1,\ \ln\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{s}{a}}\right)$$

traženo rješenje

Ravan $z=0$ napisati u parametarskom obliku.
Poslije toga istu ravan napisati u obliku
$\{\vec{a}\lambda+\vec{b}\mu+\vec{c} \mid \lambda,\mu\in\mathbb{R},\ \vec{a},\vec{b},\vec{c}$ neki konstantni vektori$\}$.

R.:

$$\mathbb{R}^3=\{(x,y,z) \mid x,y,z\in\mathbb{R}\}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \,\middle|\, x,y,z\in\mathbb{R}\right\}$$

parametarski oblik prostora

U prostoru imamo tri promjenjive.
Ravan će imati dvije promjenjive.
Kriva ima samo jednu promjenjivu

$z=0$ je $\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix} \,\middle|\, x,y\in\mathbb{R}\right\}$ tj. $\begin{cases} x=\lambda \\ y=\mu \\ z=0 \\ \lambda,\mu\in\mathbb{R} \end{cases}$

Kako je $\begin{pmatrix}\lambda\\\mu\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\lambda+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\mu$ to je

$z=0$ u stvari $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\lambda+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\mu \,\middle|\, \lambda,\mu\in\mathbb{R}\right\}$

$\vec{a}=(1,0,0)$, $\vec{b}=(0,1,0)$, $\vec{c}=(0,0,0)$.

\# Ravan $x+y=0$ napisati u parametarskom obliku. Poslije toga istu ravan napisati u obliku

$$\{\vec{a}\lambda+\vec{b}\mu+\vec{c} \mid \lambda,\mu\in\mathbb{R},\ \vec{a},\vec{b},\vec{c} \text{ konstantni vektori}\}$$

R.j.

$$\mathbb{R}^3=\{(x,y,z) \mid x,y,z\in\mathbb{R}\}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \mid x,y,z\in\mathbb{R}\right\}$$

↑ parametarski oblik prostora

Ravan će imati dvije promjenjive.

$x+y=0$ je $\left\{\begin{pmatrix}x\\-x\\z\end{pmatrix} \mid x,z\in\mathbb{R}\right\}$ tj. $\begin{cases}x=\lambda\\y=-\lambda\\z=\mu\\\lambda,\mu\in\mathbb{R}\end{cases}$

$y=-x$

Kako je $\begin{pmatrix}\lambda\\-\lambda\\\mu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\\-\lambda\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\\mu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\lambda+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\mu$ to je

$x+y=0$ u stvari $\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\lambda+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\mu \mid \lambda,\mu\in\mathbb{R}\right\}$.

$\vec{a}=(1,-1,0)$, $\vec{b}=(0,0,1)$, $\vec{c}=(0,0,0)$.

(#) Posmatrajmo krivu c datu implicitno sa

$$\vec{r}: \begin{cases} \left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1 \\ a\sqrt{b^2-c^2}\,z=c\sqrt{a^2-b^2}\,x \end{cases} \qquad a>b>c.$$

Izračunati njenu dužinu luka i nađite reparametrizaciju dužinom luka.

Rj. - upute

Da bi smo izračunali dužinu luka potrebno je krivu $\vec{r}$ napisati u parametarskom obliku.
Napišimo prvo ravan $a\sqrt{b^2-c^2}\,z=c\sqrt{a^2-b^2}\,x$ u parametarskom obliku.

$$a\sqrt{b^2-c^2}\,z=c\sqrt{a^2-b^2}\,x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad z=\frac{c\sqrt{a^2-b^2}}{a\sqrt{b^2-c^2}}\,x$$

Ako za x uzmemo $x=\frac{a\sqrt{b^2-c^2}}{b\sqrt{a^2-c^2}}\lambda$ imamo $z=\frac{c\sqrt{a^2-b^2}}{b\sqrt{a^2-c^2}}\lambda$

pa je $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{a\sqrt{b^2-c^2}}{b\sqrt{a^2-c^2}}\lambda \\ \mu \\ \frac{c\sqrt{a^2-b^2}}{b\sqrt{a^2-c^2}}\lambda \end{pmatrix} \middle| \lambda,\mu \right\}$ parametarski oblik ravni $a\sqrt{b^2-c^2}\,z=c\sqrt{a^2-b^2}\,x$.

Stavljajući ovo u jednačinu elipsoida dobijamo

$\lambda^2+\mu^2=b^2$ tj. jednačinu kruga radijusa b. Parametrizacija kruga je data sa

$$\begin{cases} x(t) = b\cos t \\ y(t) = b\sin t \\ 0 \le t < 2\pi \end{cases}$$

Pa je parametarski oblik krive $\vec{r}$ dat sa

$$\vec{r}(t): \begin{cases} \dfrac{a\sqrt{b^2-c^2}}{\sqrt{a^2-c^2}}\cos t \\ b\sin t \\ \dfrac{c\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2-c^2}}\cos t \\ 0 \le t \le 2\pi \end{cases}$$

$|\vec{r}\,'(t)|^2 = b^2$, $\quad s = \int_0^s dt = ts$ (mjereno od $s=0$) tako

da je reparametrizacija dužinom luka kruga data sa

$$\vec{r}(s) = \left(\frac{a\sqrt{b^2-c^2}}{\sqrt{a^2-c^2}}\cos\frac{s}{b},\ b\sin\frac{s}{b},\ \frac{c\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2-c^2}}\cos\frac{s}{b}\right)$$